

Lineare Algebra (Informatik)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Satz des Pythagoras)

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle CAB = 90^\circ$. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras, i.e., die Aussage

$$(\text{Länge von } AB)^2 + (\text{Länge von } AC)^2 = (\text{Länge von } BC)^2.$$

Zeigen Sie den Satz auf die Weise, wie ihn Euklid bewiesen hat (in dem Fall auch bekannt als Kathetensatz). Dazu bilden Sie je ein Quadrat über jeder Seite des Dreiecks (vgl. Fig. 1a) – dies ergibt die Quadrate $CBDE$, $BAGF$, and $ACIH$ (vgl. Fig. 1b) – und zeigen, dass $(\star)$ die Fläche des Quadrats $CBDE$ gleich der Summe der Flächen der Quadrate $BAGF$ und $ACIH$ ist.

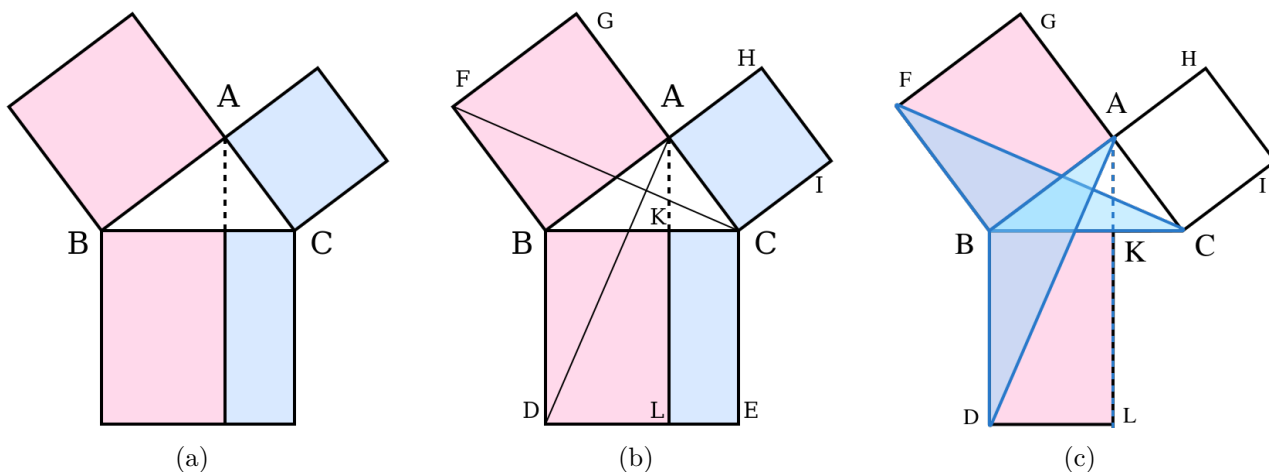


Abbildung 1: Skizzen zur Konstruktion des Euklidischen Beweises vom Satz von Pythagoras

Hinweis: Um $(\star)$ zu beweisen, wird eine Parallele zu BD und CE durch den Punkt A gezogen. Diese schneidet die Strecken BC bzw. DE im rechten Winkel bei K bzw. L (vgl. Fig. 1b). Jetzt ist $(\star)$ äquivalent zu den folgenden zwei Aussagen: (I) die Fläche des Quadrats $BAGF$ ist gleich der Fläche des Rechtecks $DLKB$ (pink hinterlegt) und (II) die Fläche des Quadrats $ACIH$ ist gleich der Fläche des Rechtecks $KLEC$ (blau hinterlegt).

Nun zeigt man zuerst (I) schrittweise wie folgt:

- (i) Man zeichnet Dreiecke BCF bzw. BDA , indem man C und F bzw. A und D verbindet, und zeigt, dass diese zwei Dreiecke kongruent und damit flächengleich sind (siehe Fig. 1c).
- (ii) Man beweist, dass das Rechteck $DLKB$ doppelt so groß ist wie das Dreieck BDA .
- (iii) Man beweist, dass das Quadrat $BAGF$ doppelt so groß ist wie das Dreieck BCF .

Der Beweis von (II) geht analog zu dem von (I).

Lösung 1 Wir bezeichnen die Länge einer Strecke mit $l(\cdot)$ und die Fläche eines Polygons mit $a(\cdot)$. Wir beweisen zuerst die Aussagen (i) bis (iii).

- (i) Die Dreiecke BCF und BDA sind kongruent nach dem SWS-Kriterium:
- $l(BA) = l(BF)$, weil $BAGF$ nach Konstruktion ein Quadrat ist
 - $l(BC) = l(BD)$, weil $BDEC$ ein Quadrat ist
 - $\angle CBF = \angle DBA$, da beide Winkel die Summe von einem rechten Winkel und der Winkel $\angle CBA$ sind.
- (ii) $a(DLKB) = 2 \cdot a(BDA)$: Die Fläche eines Dreiecks ist gegeben durch

$$\frac{1}{2} \cdot l(\text{Grundseite}) \cdot l(\text{Höhe}).$$

Um den Flächeninhalt vom Dreieck BDA zu berechnen, wählen wir BD als Grundseite. Die entsprechende Höhe steht senkrecht zu BD und ihre Länge ist gleich dem Abstand zwischen BD und A , also den Abstand zwischen BD und die zu BD parallele Gerade durch A . Somit hat sie die gleiche Länge wie die Strecke BK . Also

$$a(BDA) = \frac{1}{2} l(BD) \cdot l(BK) = \frac{1}{2} a(DLKB).$$

- (iii) $a(BAGF) = 2 \cdot a(BCF)$: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von (ii).

Die Aussagen (i) – (iii) zeigen (I), denn

$$a(BAGF) \stackrel{(iii)}{=} 2 \cdot a(BCF) \stackrel{(i)}{=} 2 \cdot a(BDA) \stackrel{(ii)}{=} a(DLKB).$$

(II) lässt sich analog zeigen. Mit (I) und (II) haben wir also:

$$\begin{aligned} (l(BC))^2 &= l(BD) \cdot l(BC) = l(BD) \cdot (l(BK) + l(KC)) \\ &= l(BD) \cdot l(BK) + l(BD) \cdot l(KC) \\ &= a(DLKB) + a(KLEC) \\ &= a(BAGF) + a(ACIH) \\ &= (l(AB))^2 + (l(AC))^2. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Kettenbruchentwicklung, ggT)

Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler (ggT) bzw. die Kettenbruchdarstellung der folgenden Zahlen zu bestimmen:

- (i) Bestimmen Sie $ggT(7, 2)$, $ggT(15, 75)$.
- (ii) Bestimmen Sie die Kettenbruchdarstellung der folgenden rationalen Zahlen: $\frac{13}{2}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{75}{33}$.

Lösung 2

- (i) $ggT(7, 2) = 1$:

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$ggT(15, 75) = 15:$$

$$75 = 5 \cdot 15 + 0$$

- (ii) Um die Kettenbruchdarstellung dieser Brüche zu bestimmen, müssen wir zuerst den euklidischen Algorithmus anwenden.

- Für den Bruch $\frac{13}{2}$ bekommen wir:

$$13 = 6 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0.$$

$$\Rightarrow \frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2}.$$

- Für den Bruch $\frac{2}{13}$ bekommen wir:

$$2 = 0 \cdot 13 + 2$$

$$13 = 6 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{13} = \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}.$$

(Wir bemerken, dass das zu erwarten war, da $\frac{2}{13}$ der Kehrwert von $\frac{13}{2}$ ist.)

- Für den Bruch $\frac{75}{33}$ bekommen wir:

$$75 = 2 \cdot 33 + 9$$

$$33 = 3 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0.$$

$$\Rightarrow \frac{75}{33} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Aufgabe 3 (Allgemeine Form der Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{n}$)

- (i) Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, zeigen Sie die folgende Identität:

$$\sqrt{n} = a + \frac{n - a^2}{a + \sqrt{n}}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Identität $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (ii) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe i), um iterativ die folgende allgemeine Form der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, zu erhalten.

$$\sqrt{n} = a + \frac{n - a^2}{2a + \frac{n - a^2}{2a + \frac{n - a^2}{2a + \ddots}}}.$$

Bemerkung: In der Vorlesung wurde der Fall $n = 2$ und $a = 1$ geometrisch hergeleitet (siehe auch Aufgabe 4).

- (iii) Benutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe ii), um zwei verschiedene Kettenbruchdarstellungen von $\sqrt{5}$ zu erhalten (d. h. benutzen Sie zwei verschiedene Werte für $a \in \mathbb{N}$, z.B. $a = 1$ und $a = 2$). Bestimmen Sie $\sqrt{5}$ jeweils bis zu einer Genauigkeit, bei der sich die zweite Dezimalstelle nicht mehr ändert. Was fällt Ihnen auf?

Lösung 3

(i) Aus der dritten binomischen Formel (Hinweis) folgt:

$$\begin{aligned}n - a^2 &= (\sqrt{n} - a)(\sqrt{n} + a) \\ \Leftrightarrow \frac{n - a^2}{\sqrt{n} + a} &= \sqrt{n} - a \\ \Leftrightarrow \frac{n - a^2}{\sqrt{n} + a} + a &= \sqrt{n}.\end{aligned}$$

(ii) Aus Teil (i) folgern wir:

$$a + \sqrt{n} = a + \left(a + \frac{n - a^2}{a + \sqrt{n}} \right) = 2a + \frac{n - a^2}{a + \sqrt{n}}.$$

Also,

$$\sqrt{n} \stackrel{(i)}{=} a + \frac{n - a^2}{a + \sqrt{n}} = a + \frac{n - a^2}{2a + \frac{n - a^2}{a + \sqrt{n}}} = a + \frac{n - a^2}{2a + \frac{n - a^2}{a + \sqrt{n}}}$$

Wir sehen, dass nach jeder Substitution der Term $a + \sqrt{n}$ im Nenner wieder auftaucht. Wenn wir diesen Prozess unendlich oft iterieren, bekommen wir die Kettenbruchdarstellung aus der Aufgabenstellung.

(iii) Wir setzen zuerst $a = 1$ und berechnen die ersten Näherungsbrüche:

$$b_1 = 1 + \frac{4}{2} = 3$$

$$b_2 = 1 + \frac{4}{2 + \frac{4}{2}} = 1 + \frac{4}{4} = 2$$

$$b_3 = 1 + \frac{4}{2 + \frac{4}{2 + \frac{4}{2}}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} = 2,333 \dots$$

$$b_4 = 1 + \frac{4}{2 + \frac{4}{2 + \frac{4}{2 + \frac{4}{2}}}} = 1 + \frac{4}{2 + \frac{4}{3}} = 1 + \frac{12}{10} = 2,2$$

$$b_5 = 1 + \frac{4}{2 + \frac{12}{10}} = 1 + \frac{40}{32} = 2,25$$

$$b_6 = 1 + \frac{4}{2 + \frac{40}{32}} = 1 + \frac{128}{104} = 2,2307 \dots$$

$$b_7 = 1 + \frac{4}{2 + \frac{128}{104}} = 1 + \frac{4}{2 + \frac{16}{13}} = 1 + \frac{52}{42} = 2,2380 \dots$$

$$b_8 = 1 + \frac{4}{2 + \frac{52}{42}} = 1 + \frac{21}{17} = 2,23529\dots$$

Mit $a = 2$ bekommen wir:

$$c_1 = 2 + \frac{1}{4} = 2,25$$

$$c_2 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{17} = 2,23529\dots$$

$$c_3 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{4}{17}} = 2 + \frac{17}{72} = 2,23611\dots$$

$$c_4 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{17}{72}} = 2 + \frac{72}{305} = 2,23607\dots$$

Wir beobachten, dass die Näherungsbrüche mit Anfangswert $a = 2$ deutlich schneller gegen $\sqrt{5}$ konvergieren, d.h. die ersten *drei* Nachkommastellen ändern sich schon bei c_4 nicht mehr, während bei b_6 erst die richtige zweite Dezimalstelle von $\sqrt{5}$ auftaucht, und nach acht Iterationen stimmt die dritte immer noch nicht.

Aufgabe 4 (Inkommensurabilität von Diagonale und Seite im Quadrat)

Fertigen Sie eine beschriftete Zeichnung der geometrischen Konstruktion von Euklid, mit der in der Vorlesung bewiesen wurde, dass die Diagonale und Seite im Quadrat nicht kommensurabel sind. Schreiben Sie die Gleichungen auf, die iterativ zu einer immer besseren Darstellung des Verhältnisses von Diagonale und Seite und damit approximativ zum Wert von $\sqrt{2}$ führen.

Lösung 4

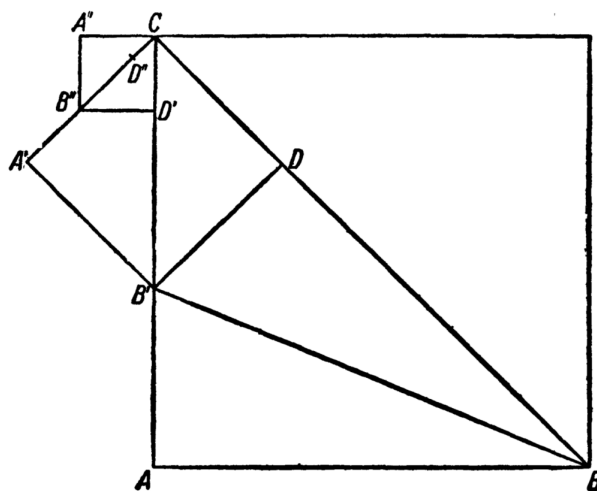


Abb. 3.

Abbildung 2: Otto Toeplitz – *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I* (1. Auflage, S. 4)

Sei a_0 die Länge der Seite AB des Quadrates und d_0 die Länge der Diagonale BC . Der Punkt D auf BC hat Abstand a_0 zu B .

Wir konstruieren den Punkt B' als Schnittpunkt der Senkrechte zur Strecke BD ab D mit der Seite AC . Die Dreiecke $B'BD$ und $B'AB$ sind kongruent (SWS), und somit sind AB' und $B'D$ gleich lang. Zusätzlich ist $l(B'D) = l(DC)$, da $B'DC$ gleichschenkelig ist: Der Winkel an D ist 90° , der Winkel an C ist nach Konstruktion 45° , und somit ist der Winkel an B' $(90 - 45)^\circ = 45^\circ$.

Wir konstruieren das Quadrat $DCA'B'$. Sei a_1 die Länge der Strecke DB' und d_1 die Länge der Diagonale $B'C$ des Quadrates $DCA'B'$. Es gilt

$$\frac{d_0}{a_0} = \frac{d_1}{a_1}$$

Der Punkt D' lässt sich analog auf CB' konstruieren wie D auf BC , und hat Abstand a_1 zu B' . Iterativ können wir Punkte $D'', D^{(3)}, D^{(4)} \dots$ auf immer kleinere Quadrate konstruieren und bekommen Diagonalen- und Seitenlängen d_i bzw. a_i für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Der Euklidische Algorithmus kann also nie terminieren, da sonst würde diese Konstruktion nach endlich vielen Schritten auch terminieren.

Siehe Satz 1.2.1 im Skript für die relevanten Gleichungen.